Enseignement supérieur
Classes préparatoires aux grandes écoles

Année scolaire 2024-2025

– Consignes estivales pour préparer la rentrée –

Classe prépa ECG – 1e année

MATHEMATIQUES (ANALYSE)

Professeur :
M. Claude Sellier (sellier.lamerci@gmail.com)

Chers futurs élèves,
Pour ces vacances voici dix exercices portant sur des thèmes variés de la Terminale.
Toutes les questions sont à la portée d'un élève de Terminale mais demandent davantage de réflexion que ce qui est demandé au Bac.
N'hésitez pas à passer du temps dessus, voire beaucoup de temps.
La phase de recherche fait partie du jeu, elle est nécessaire pour progresser.
Avant de commencer, il y a plusieurs choses qu'il faut que vous sachiez :

- **La calculatrice est interdite en prépa ECG, donc il faut s'habituer à réfléchir sans cet outil, y compris pour ces dix exercices.**
- **Les exercices sont à rédiger et à rendre sur une copie le jour de la rentrée.**
- **Le but de ce devoir est de vous permettre de faire un bilan de ce que vous avez appris au lycée et parfois d'aller un peu plus loin en cherchant à répondre à des questions non triviales. Cela vous permettra de vérifier votre connaissance et bonne compréhension du cours de Terminale.**
- **Attention, en recopiant un corrigé ou en se faisant aider, vous vous privez de cet entraînement, ce qui ne facilitera pas votre réussite aux concours, et vous privez votre professeur d'un moyen de détecter vos faiblesses et d'y remédier le cas échéant par des explications individuelles ou par une reprise du cours.**
  En tout état de cause, ne recopiez jamais la réponse à une question sans l'avoir comprise mais allez plutôt revoir votre cours, cherchez-y des réponses et faites-vous confiance.

Bon travail et bon été !!!

I. Calculs :

1. Calculs de fractions :

Montrer que :

a. $\frac{4}{3^2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = 1$

b. $\frac{4}{3^3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$

c. $\frac{4}{3^3} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = 1$

d. $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 1\right) + \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{1-\frac{2}{5}} - 1\right) = 1$

2. Développements :

Soit la fonction *f* définie par : $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 4y$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tous réels *x* et *y* : $f(x,y) = (x+a)^2 + 3(y+b)^2 + c$
2. En déduire l'existence et la valeur d'un minimum absolu pour *f*.

3. Fonction exponentielle :

Simplifier chacune des expressions ci-dessous.

a. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

b. $e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2$

c. $\frac{e^{2x} \times e^{-x+1}}{e^x}$

d. $\frac{e^{4x} \times e^{-2x+2}}{e^x}$

e. $(e^{2x})^3 \times e^{-4x+2}$

f. $(e^{3x})^2 \times e^{-4x+1}$

4. Fonction logarithme Népérien :

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\ln(6) + \ln(8) - \ln(4) - \ln(3)$

b. $\ln\left(e^6 \times \sqrt{e} \times \ln(e)\right)$

c. $\frac{1+2\ln(e)}{2}$

d. $\frac{\ln(\ln e)+3}{\ln(e^3)}$

e. Montrer que pour tout *x* > 1 : $\ln(x^2-1) - \ln(x+1) + \ln(x^2-2x+1) = 3\ln(x-1)$

5. Résolution d'un système :

On considère le système (E) d'inconnues *x* et *y* réelles : $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=12 \end{cases}$.

1. Montrer que le système (E) équivaut au système : $\begin{cases} y = 8-x \\ x^2-8x+12=0 \end{cases}$.
2. En déduire les solutions du système (E).

6. Calculs de sommes :

Donner la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=3}^{7} k \quad ; \quad S_2 = \sum_{i=3}^{5} i^2 \quad ; \quad S_3 = \sum_{j=2}^{4} \frac{1}{j} \quad ; \quad S_4 = \sum_{k=0}^{5} 2^k \;;$$

$$S_5 = \sum_{i=4}^{12} 2 \quad ; \quad S_6 = \sum_{j=1}^{5} \ln(j) \quad ; \quad S_7 = \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{2^k} \quad ; \quad S_8 = \sum_{i=3}^{7} \frac{i^2}{45}$$

Les résultats sont dans le désordre et parmi les valeurs suivantes : 63 ; 18 ; 25 ; 50 ; ln(120) ; $\frac{13}{8}$; $\frac{13}{12}$; 6 ; 47 ; 59 ; 3 ; 21

II. Fonctions :

7. Fonctions définies par morceaux :

1. Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 1 \\ x & si \quad 1 \leq x \leq 3. \\ 3 & si \quad x > 3 \end{cases}$

2. Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| > 1 \\ -2x-1 & si \quad -1 \leq x \leq 0. \\ 2x-1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

8. Maximum, Minimum (= extremum) :

Déterminer les extrema locaux éventuels des fonctions :

a) $f(x) = x - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) $f(x) = x - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \frac{2-\ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$

d) $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

9. Etude de fonction :

On considère f définie par : $\forall x \in]-1; +\infty[,\ f(x) = x\ln(1+x)$. On rappelle que $\ln(2) \approx 0{,}7$, $\ln(3) \approx 1{,}1$

a. Montrer que pour tout réel x de $]-1; +\infty[$: $f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$.

b. En déduire les variations de f' puis de f (on pourra "empiler" les tableaux de variations et calculer $f'(0)$).

c. Déterminer les limites suivantes $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

d. Donner les valeurs exactes puis des valeurs approchées de : $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

10. Convexe ou concave ?

Étudier la convexité des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition.
Déterminer également les éventuels points d'inflexion.

a. $f(x) = x^2 - x\ln x$

b. $f(x) = x^2(6\ln(x) - 2x - 9)$

c. $f(x) = \frac{x^4}{12} + (-x+2)e^x$.

11. Preuve des croissances comparées pour ln :

1. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Montrer que f est majorée par un réel M.

2. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$.

   b. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2M}{\sqrt{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

   c. A l'aide d'un changement de variable, montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ pour tout $\alpha > 0$.

3. En posant enfin $X = \frac{1}{x} > 0$, justifier que : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to 0} X^\alpha \ln(X) = 0$.

12. Propriété algébrique de ln :

1. Soit $a > 0$. Dériver la function f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$.
2. En déduire que la function f est constante et préciser sa valeur pour tout reel $x > 0$.
3. En déduire la propriété algébrique vérifiée par la fontion ln pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$.

13. ln est concave en passant par la tangente (niveau 2)

On pose $f(x) = \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a > 0$.

1. Montrer que la tangente à C_f au point d'abscisse a a pour équation : $y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln(a)$
2. On pose alors la fonction différence définie sur $\mathbb{R}^{+*}$: $\phi(x) = f(x) - \frac{1}{a}(x-a) - \ln(a)$

   Montrer que ϕ est négative sur $\mathbb{R}^{+*}$ (égalité en a). En déduire que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. En vous inspirant des deux premières questions, sauriez-vous montrer que exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

III. Suites :

14. Systèmes récurrents :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0,\ v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$

On pose $x_n = u_n + v_n$ et $y_n = u_n - v_n$.

a. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont géométriques respectivement de raisons 4 et 2.

b. En déduire les expressions de x_n et de y_n pour tout entier *n*.

c. En déduire les expressions de u_n et de v_n pour tout entier *n*, en résolvant un système.

15. Suite auxiliaire :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 2$, pour tout entier *n*.

1. Montrer que $v_n = \ln(u_n - 1)$ est le terme général d'une suite géométrique de raison 2.
2. En déduire que pour tout *n* entier : $u_n = 2^{2^n} + 1$.

16. Raisonnement par récurrence :

a. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$

b. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n - 3$

c. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}$.