Bonjour à tous,

Pour préparer au mieux la partie Algèbre et Probabilités discrètes de deuxième année, il convient d'être à l'aise principalement sur les deux points suivants :

— le calcul matriciel, notamment l'inversion de matrice ;
— les probabilités de 1ère année, voire de Terminale (modélisation de situations probabilistes, calcul de probabilités avec la formule des probabilités totales, des probabilités composées, les lois de probabilités usuelles...).

Tout exercice d'entraînement calculatoire sur ces deux points peut s'avérer utile pour la préparation du programme de deuxième année. Par ailleurs, une grande partie des exercices de probabilités issus des annales ne traite que du programme de première année et permet un bon entraînement quant à la capacité à comprendre et à modéliser une situation probabiliste. Voici quelques exercices pour vous entrainer sur ces différents aspects :

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -x+2y-z &= -5 \\ x-4y+2z &= 7 \\ -2x-2y+2z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, puis A^n pour tout entier naturel n.
2. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 4 - d'après ECRICOME 2015 :

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

1 Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :
— N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ème tirage" ;
— B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ème tirage.

1. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
3. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

2 Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

— C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1" ;
— C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2.

1. Montrer que pour tout entier j compris entre 1 et N :

$$P_{C_1}(Y=j)=\frac{1}{N}$$

2. Calculer $P_{C_2}(Y=j)$ pour tout entier j compris entre 1 et N (*on distinguera les cas* $j=N$ *et* $1\leq j\leq N-1$).
3. Montrer que :

$$P(Y=j)=\begin{cases}\frac{1}{N} & \text{si } j\in[[1,N-1]]\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2N} & \text{si } j=N\end{cases}$$

4. Calculer l'espérance de Y.

3 Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,. . . , alors $T=4$.

1. Préciser les valeurs prises par T.
2. Montrer soigneusement que pour tout entier $k\geq 2$:

$$P(T=k)=\frac{1}{N}(\frac{N-1}{N})^{k-1}+\frac{N-1}{N}(\frac{1}{N})^{k-1}$$

3. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.